第 1 問

[1]

$\boxed{\text{ア}}$・$\boxed{\text{イ}}$

$8-x>0$ かつ $x-2>0$ より，

$2<x<8$

$\boxed{\text{ウエ}}$・$\boxed{\text{オカ}}$・$\boxed{\text{キ}}$

$0<a<1$ において， $2\log_a(8-x)=\log_a(8-x)^2>\log_a(x-2)$ のとき，

$(8-x)^2<x-2$

$\therefore x^2-17x+66<0$

$\boxed{\text{ク}}$・$\boxed{\text{ケ}}$

$x^2-17x+66=(x-6)(x-11)<0$ より，　$6<x<11$

これと $2<x<8$ より，

$6<x<8$

$\boxed{\text{コ}}$・$\boxed{\text{サ}}$

$x^2-17x+66=(x-6)(x-11)>0$ より，　$x<6$，　$11<x$

これと $2<x<8$ より，

$2<x<6$

[2]

$\boxed{\text{シ}}$・$\boxed{\text{ス}}$

$\cos 2\beta = \dfrac{1}{2}$，$0 \le 2\beta \le 2\pi$ より，$2\beta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi$　$\therefore \beta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

$\boxed{\text{セ}}$・$\boxed{\text{ソ}}$・$\boxed{\text{タ}}$・$\boxed{\text{チ}}$・$\boxed{\text{ツ}}$・$\boxed{\text{テ}}$

$0 \le 2\beta_1 < 2\beta_2 \le 2\pi$，$0 \le \sin\alpha \le 1$ より，

$2\beta_1$ と $2\beta_2$ の値の範囲は，$0 \le 2\beta_1 \le \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi \le 2\beta_2 \le 2\pi$　$\therefore 0 \le \beta_1 \le \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi \le \beta_2 \le \pi$

また，$2\beta_2 = 2\pi - 2\beta_1$　$\therefore \beta_1 + \beta_2 = \pi$　・・・①

さらに，$\sin\alpha = \cos 2\beta$ より，$\cos\left\{\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2n\pi\right\} = \cos 2\beta$　$\therefore \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{4n-1}{4}\pi = \beta$　・・・②

①，②より，β_1 と β_2 のどちらか一方が $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{4n-1}{4}\pi$（$\alpha$ の係数が正）と表されるとき，

もう一方は $\pi - \left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{4n-1}{4}\pi\right) = -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{-4n+5}{4}\pi$（$\alpha$ の係数が負）と表されるから，

$0 \le \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{4n-1}{4}\pi = \beta_1 \le \dfrac{\pi}{4}$ となる場合と $\dfrac{3}{4}\pi \le \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{4n-1}{4}\pi = \beta_2 \le \pi$ となる場合に分ける。

$0 \le \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{4n-1}{4}\pi = \beta_1 \le \dfrac{\pi}{4}$ となる場合

　$n = 0$，$\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ のときであり，このとき $\beta_1 = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}$　$\therefore \beta_2 = \pi - \beta_1 = -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{5}{4}\pi$

$\dfrac{3}{4}\pi \le \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{4n-1}{4}\pi = \beta_2 \le \pi$ となる場合

　$n = 1$，$0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ のときであり，このとき，$\beta_2 = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{3}{4}\pi$　$\therefore \beta_1 = \pi - \beta_2 = -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

以上より，

$0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\beta_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$，$\beta_2 = \dfrac{3}{4}\pi + \dfrac{\alpha}{2}$

$\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ のとき，$\beta_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$，$\beta_2 = \dfrac{5}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$

補足

　$\sin\alpha = \sin\left\{\left(2\beta + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2n\pi\right\}$ より，$2\beta = \alpha - \dfrac{4n+1}{2}\pi$ とおいて求めてもよい。

$\boxed{ト}$・$\boxed{ナ}$・$\boxed{ニヌ}$・$\boxed{ネ}$

$\beta_1+\beta_2=\pi$ より，

$$\alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3}=\alpha+\frac{1}{6}\beta_1+\frac{2(\beta_1+\beta_2)}{6}$$
$$=\alpha+\frac{1}{6}\beta_1+\frac{1}{3}\pi$$

$0\leq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\beta_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$ より，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\alpha+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\dfrac{1}{3}\pi=\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi$

$\therefore\dfrac{3}{8}\pi\leq\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}<\dfrac{5}{6}\pi$　・・・①

$\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\pi$ のとき

$\beta_1=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}$ より，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\alpha+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\dfrac{1}{3}\pi=\dfrac{13}{12}\alpha+\dfrac{7}{24}\pi$

$\therefore\dfrac{5}{6}\pi\leq\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}<\dfrac{11}{8}\pi$　・・・②

①，②より，

$\dfrac{3}{8}\pi\leq\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}<\dfrac{11}{8}\pi$

$\boxed{ノ}$・$\boxed{ハヒ}$・$\boxed{フ}$

$y=\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}\right)$　$\dfrac{3}{8}\pi\leq\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}<\dfrac{11}{8}\pi$ より，

$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，y は最大値 1 ととる。

また，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ となるのは，$\dfrac{3}{8}\pi\leq\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}<\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，

すなわち $0\leq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のときであり，

このとき，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi$ より，$\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\alpha=\dfrac{3}{22}\pi$

第 2 問

(1)

$\boxed{ア}$・$\boxed{イ}$・$\boxed{ウ}$

$y=g(x)=x^3$ とおくと，

点 $\mathrm{P}(a,a^3)$ における接線の方程式は，　$y=g'(a)(x-a)+a^3=3a^2(x-a)+a^3$

$\therefore y=3a^2x-2a^3$

$\boxed{エ}$・$\boxed{オ}$・$\boxed{カキ}$・$\boxed{ク}$

C の点 P は (a,a^3)，　D の点 P は (a,a^2+pa+q) と表されるから，

$a^3=a^2+pa+q$　・・・①

$y=h(x)=x^2+px+q$ とおくと，　$g'(a)=h'(a)$ より，

$3a^2=2a+p$　・・・②

①，②より，

$p=3a^2-2a$

$q=-2a^3+a^2$

(2)

$\boxed{ケコ}$・$\boxed{サ}$

$p=3a^2-2a$，　$q=-2a^3+a^2$ より，

$h(x)=x^2+(3a^2-2a)x-2a^3+a^2$

これと $h(0)=b$ より，　$b=-2a^3+a^2$

$\boxed{シ}$・$\boxed{ス}$・$\boxed{セ}$・$\boxed{ソ}$・$\boxed{タ}$・$\boxed{チツ}$・$\boxed{テ}$

$f(x)=-2x^3+x^2$ より，　$f'(x)=-6x^2+2x=-2x(3x-1)$

したがって，増減表は次のようになる。

x		0		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$\frac{1}{27}$	$\downarrow$

よって，関数 $f(x)$ は，　$x=0$ で極小値 0 をとり，

$x=\frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{1}{27}$ をとる。

関数 $f(x)$ のグラフをかくことにより，　$0<b<\frac{1}{27}$ のとき，

$b=-2a^3+a^2$ を満たす a の値の個数は 3 であることがわかる。

(3)

$\boxed{ト}$・$\boxed{ナ}$・$\boxed{ニ}$

$x^2+(3a^2-2a)x-2a^3+a^2$ が重解をもつことと同じだから，

判別式$=(3a^2-2a)^2-4(-2a^3+a^2)=9a^4-4a^3=a^3(9a-4)=0$

$\therefore a=0\,,\ \dfrac{4}{9}$

$\boxed{ヌ}$・$\boxed{ネノ}$

放物線 D_1 の式は，$y=x^2$

放物線 D_2 の式について

$x^2+(3a^2-2a)x-2a^3+a^2=0$ の重解を α とすると，

解と係数の関係より，$2\alpha=-(3a^2-2a)$

$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{2}(3a^2-2a)=-\dfrac{a}{2}(3a-2)$

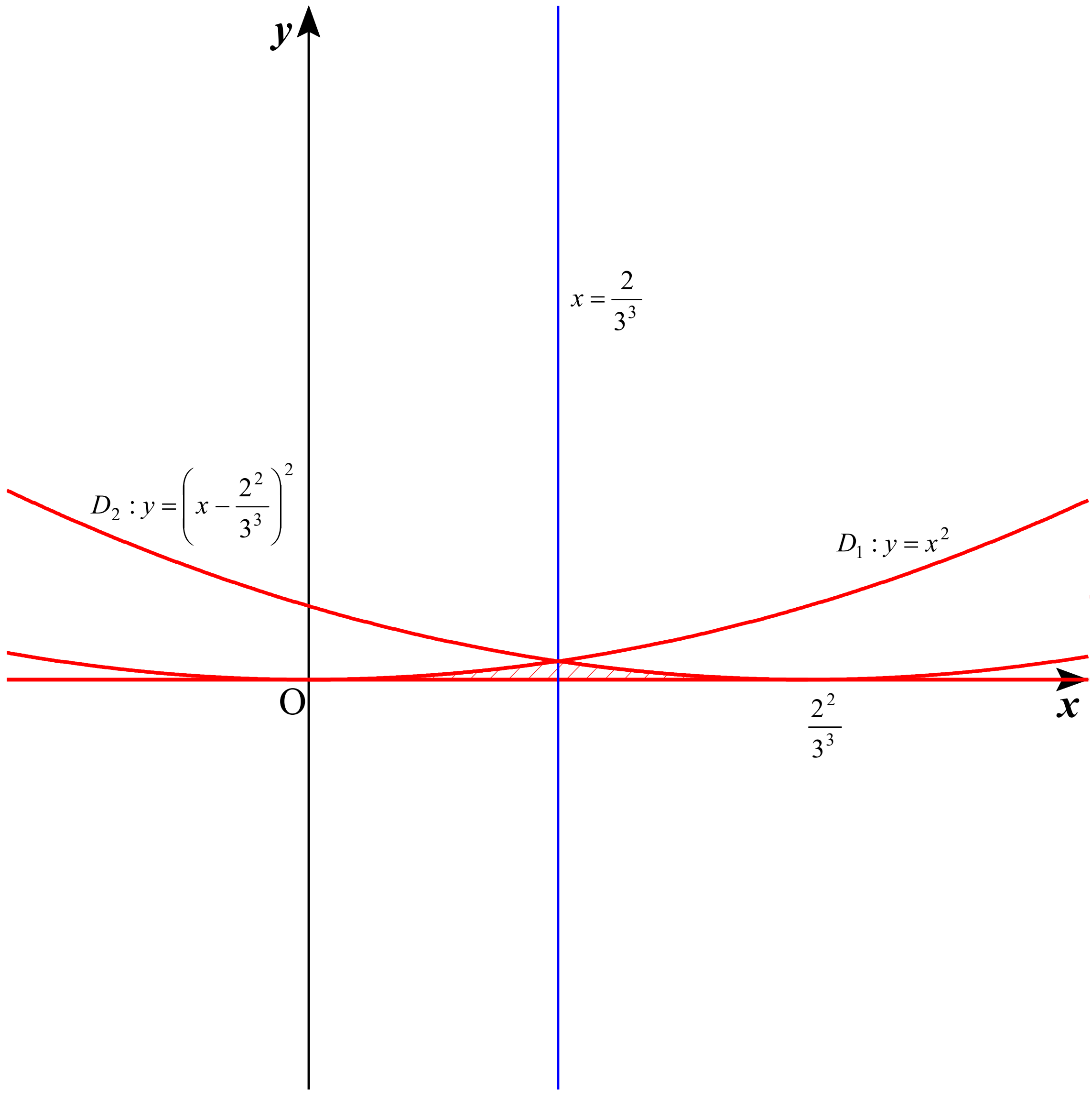
$a=\dfrac{4}{9}$ より，$\alpha=-\dfrac{2}{9}\cdot\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{6}{3}\right)=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{2^2}{3^3}$

$\therefore y=\left(x-\dfrac{2^2}{3^3}\right)^2$

放物線 D_1 と放物線 D_2 は，頂点が x 軸上にある合同な放物線だから，

$x=\dfrac{0+\dfrac{2^2}{3^3}}{2}=\dfrac{2}{3^3}$ に関して対称である。

$\therefore 2\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3^3}}x^2dx=\frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{2}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3^3}\right)^3=\frac{2^4}{3^{10}}$



y
$x = \frac{2}{3^3}$
$D_2 : y = \left(x - \frac{2^2}{3^3}\right)^2$
$D_1 : y = x^2$
O
$\frac{2^2}{3^3}$
x

第 3 問

$\boxed{アイ}$・$\boxed{ウ}$・$\boxed{エオ}$・$\boxed{カキ}$・$\boxed{ク}$・$\boxed{ケ}$・$\boxed{コ}$・$\boxed{サ}$・$\boxed{シ}$

公差を d とすると，$a_5 - a_2 = 3d$ より，

$$d = \frac{a_5 - a_2}{3} = -2$$

$$a_1 = a_2 - d = \frac{-1}{3}$$

$$a_n = -\frac{1}{3} + (n-1) \cdot -2 = -2n + \frac{5}{3}$$

$$S_n = \text{項の平均値} \times \text{項数} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-\frac{1}{3} + \left(-2n + \frac{5}{3}\right)}{2} \cdot n = -n^2 + \frac{2}{3}$$

$\boxed{ス}$・$\boxed{セ}$・$\boxed{ソ}$・$\boxed{タ}$・$\boxed{チ}$・$\boxed{ツ}$・$\boxed{テ}$・$\boxed{ト}$・$\boxed{ナ}$・$\boxed{ニ}$・$\boxed{ヌ}$・$\boxed{ネ}$

①について，$n = 1$ のとき，

$b_1 = \frac{4}{3} b_1 + S_1$，　$S_1 = a_1$ より，$b_1 = \frac{4}{3} b_1 - \frac{1}{3}$　　$\therefore b_1 = 1$

$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}$ について，

$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{4}{3} b_n + S_n$ より，$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \frac{4}{3} b_{n+1} + S_{n+1}$

よって，

$$\frac{4}{3} b_{n+1} + S_{n+1} = \frac{4}{3} b_n + S_n + b_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{3} b_{n+1} &= \frac{4}{3} b_n - (S_{n+1} - S_n) \\ &= \frac{4}{3} b_n - a_{n+1} \\ &= \frac{4}{3} b_n + 2(n+1) - \frac{5}{3} \\ &= \frac{4}{3} b_n + 2n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\therefore b_{n+1} = 4b_n + 6n + 1$

$b_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 4(b_n + \alpha n + \beta)$ とおくと，$b_{n+1} = 4b_n + 3\alpha n + 3\beta - \alpha$　　$\therefore \alpha = 2$，　$\beta = 1$

$\therefore b_{n+1} + 2(n+1) + 1 = 4(b_n + 2n + 1)$

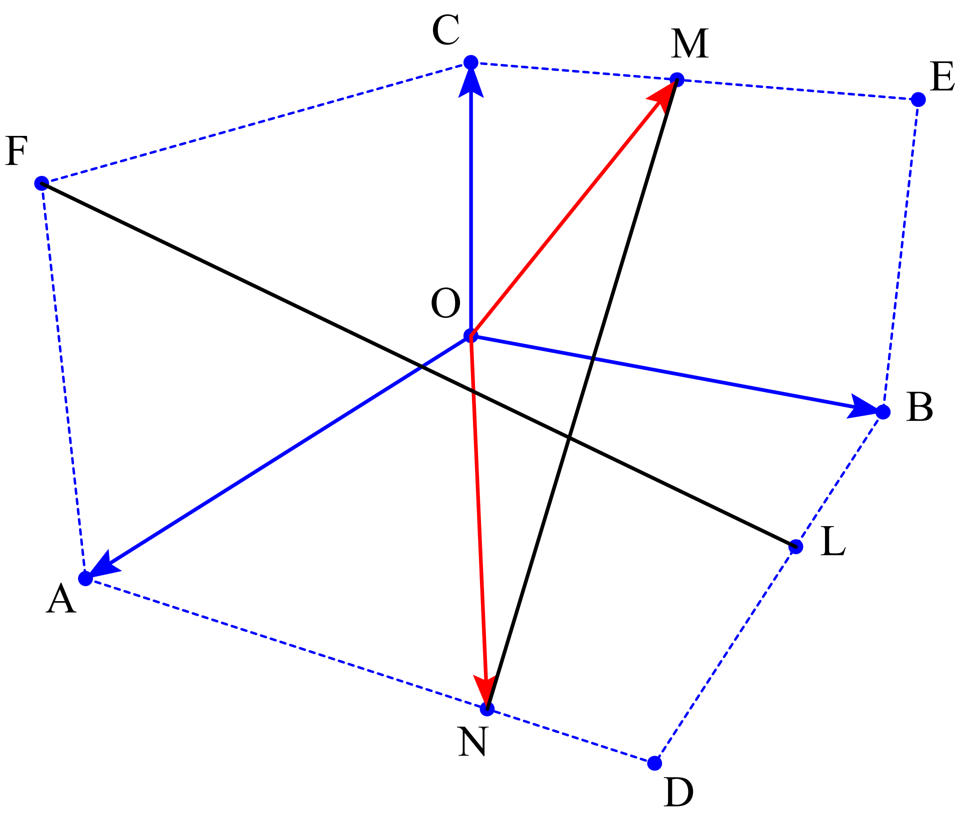
数列 $\{c_n\}$ は，$c_1 = b_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$，公比 4 の等比数列だから，$c_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

これと $c_n = b_n + 2n + 1$ より，

$b_n = 4^n - 2n - 1$

第 4 問

ベクトル合成のコツは矢印を継ぎ足すことにある。



(1)

$\boxed{ア}$・$\boxed{イ}$・$\boxed{ウ}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

(2)

$\boxed{\text{エ}}$・$\boxed{\text{オ}}$・$\boxed{\text{カ}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OF}}+s\overrightarrow{\mathrm{OL}}$$
$$=(1-s)(\vec{a}+\vec{c})+s\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$$

$\boxed{\text{キ}}$・$\boxed{\text{ク}}$・$\boxed{\text{ケ}}$・$\boxed{\text{コ}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c}-\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)$$
$$=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-s\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}-\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)$$
$$=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=k\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ とすると，

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は互いに独立なベクトルだから，

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数について，

$$\frac{1-\frac{s}{2}}{1}=\frac{s-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{-s}{-1}=k$$

が成り立つ。

$$\therefore 1-\frac{s}{2}=4s-2=s=k \qquad \therefore s=k=\frac{2}{3}$$

よって，

$s=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ となるので，M，N，P は一直線にある。

(3)

$\boxed{サ}$・$\boxed{シ}$・$\boxed{ス}$・$\boxed{セ}$・$\boxed{ソ}$・$\boxed{タ}$

(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1-\dfrac{s}{2}\right)\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$ において，$s=\dfrac{2}{3}$ のときのベクトルだから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\\&=\frac{1}{3}\left(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GF}}&=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\&=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{3}\left(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right|^2&=\left\{\frac{1}{3}\left(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\right)\right\}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\right)\right\}\\&=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{9}(5+64+12-4\cdot0-8\cdot0+4\cdot0)\qquad\left(\because\vec{a}\perp\vec{b},\vec{b}\perp\vec{c},\vec{c}\perp\vec{a}\right)\\&=9\end{aligned}$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right|=3$$

$\boxed{チ}$・$\boxed{ツテ}$・$\boxed{ト}$・$\boxed{ナ}$・$\boxed{ニ}$・$\boxed{ヌ}$・$\boxed{ネ}$

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\&=t\vec{c}-\frac{1}{3}\left(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{-2\vec{a}-2\vec{b}+(3t-1)\vec{c}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}&=\frac{1}{9}\left(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\right)\left\{-2\vec{a}-2\vec{b}+(3t-1)\vec{c}\right\}\\&=\frac{1}{9}\left\{-2|\vec{a}|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+2(3t-1)|\vec{c}|^2\right\}\\&=\frac{1}{9}\{-2\cdot5+64+2(3t-1)\cdot3\}\\&=2t+\frac{16}{3}\end{aligned}$$

$$\frac{\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}}{\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}}=\frac{\left|\overrightarrow{GF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{GH}\right|\cos\angle FGH}{\left|\overrightarrow{GM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{GH}\right|\cos\angle MGH}=\frac{\left|\overrightarrow{GF}\right|}{\left|\overrightarrow{GM}\right|}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}$$

これと $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}=2t+\dfrac{16}{3}$，　$\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}=2t+\dfrac{10}{3}$ より，

$$2t+\frac{16}{3}=\frac{3}{2}\left(2t+\frac{10}{3}\right)$$

$$\therefore t=\frac{1}{3}$$